

相位噪声和抖动的功率谱密度：理论、数据分析和实验结果

作者：Gil Engel

简介

模数和数模转换器采样时钟内的抖动会对可实现的最大信噪比造成限制（参见参考文献部分 van de Plassche 著《集成模数和数模转换器》）。本应用笔记阐述了相位噪声和抖动的定义，绘制了其功率谱密度，介绍了时域和频域测量技术，解释了实验室设备的不利因素并提供这些技术的校正要素。所提出的理论有实验结果支持，可用于解决实际问题。

概述

电子设备有多种技术可以生成时钟。电路包括 R-C 反馈电路、定时器、振荡器和晶体及晶体振荡器。根据具体电路要求，人们可能接受高相位噪声（抖动）的廉价时钟源。但是，最近的新器件要求更出色的时钟性能，也就是更昂贵的时钟源。人们对转换器采样信号的频谱纯度也提出同样的要求，尤其是在当前高性能转换器测试过程中使用频率合成器作为时钟源时。下面章节介绍了相位噪声和抖动的定义。然后结合相位噪声和抖动，通过数学推导形成其频率表示形式。频域表示法或功率谱密度用来直接衡量相位噪声 / 抖动。所建立的理论和模数和数模转换器相关。各种信号采用频谱分析仪和示波器来测量。最后，结合实验结果，在 [AD9235](#) 模数转换器（ADC）上应用理论。

目录

简介.....	1	测试设备.....	10
概述.....	1	示波器.....	10
修订历史.....	2	频谱分析仪.....	10
定义.....	3	检验.....	11
相位噪声.....	3	实验结果.....	12
抖动.....	3	信号 1.....	12
功率谱密度.....	5	信号 2.....	12
示例 1.....	6	信号 3.....	13
示例 2—相位噪声.....	6	高速转换器.....	15
示例 3—抖动.....	7	结论.....	17
转换器应用.....	8	参考文献.....	17
示例 1.....	9		

修订历史

2010 年 4 月—修订版 0 : 初始版

定义

相位噪声和抖动有多种解释。在本应用笔记的背景中，相位噪声和抖动定义如下：

假设有正弦信号

$$\sin(\omega t + A) \quad (1)$$

其中：

$$\omega = 2\pi f。$$

f 为所需频率。

A 为恒定相位偏移。

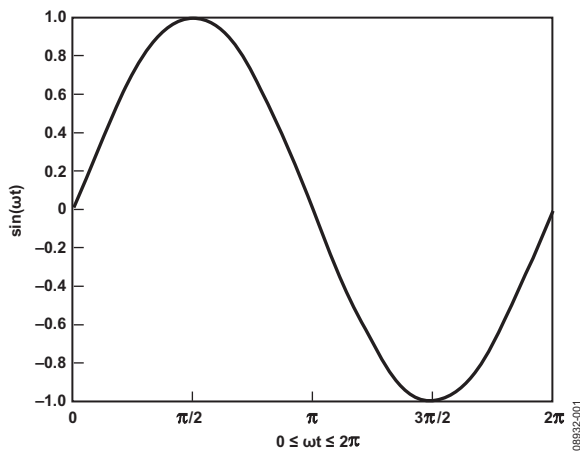


图 1. 归一化正弦信号

相位噪声

相位噪声定义为任意函数 $\Phi(t)$ ，这样公式 1 变成

$$\sin(\omega t + A + \Phi(t)) \quad (2)$$

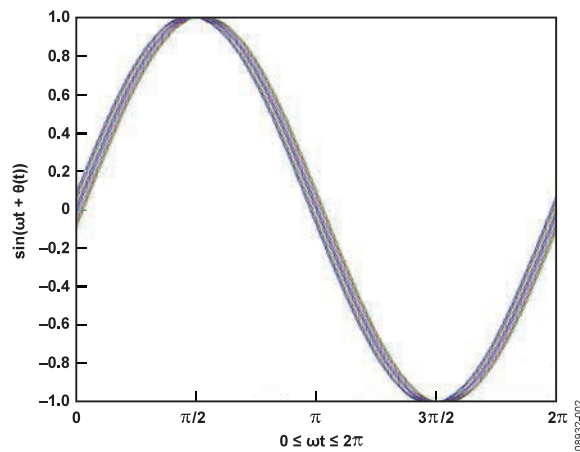


图 2. 带相位噪声的正弦信号

函数 $\Phi(t)$ 可由与 ωt 无关的频率分量所组成，例如热噪声、散粒噪声和 $1/f$ 噪声（闪烁噪声）。但在大多数情况下，它被模型化为高斯噪声（见参考文献部分 Manassewitsch 著《频率合成器理论和设计》第三版）。

同样地，采样时钟可视为以固定时间间隔 τ 重复上升沿和下降沿的周期性方波，使得

$$\tau = 1/f \quad (3)$$

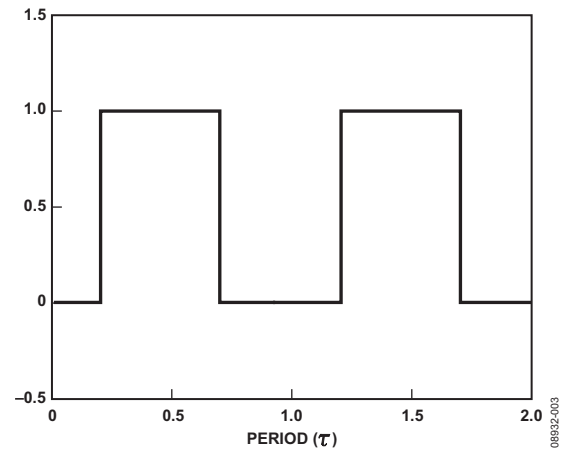


图 3. 采样时钟

抖动

抖动可视为固定时间间隔 τ 的加性时间变量 $\Delta(t)$ ，得出

$$\tau + \Delta(t) = 1/f + \Delta(t) \quad (4)$$

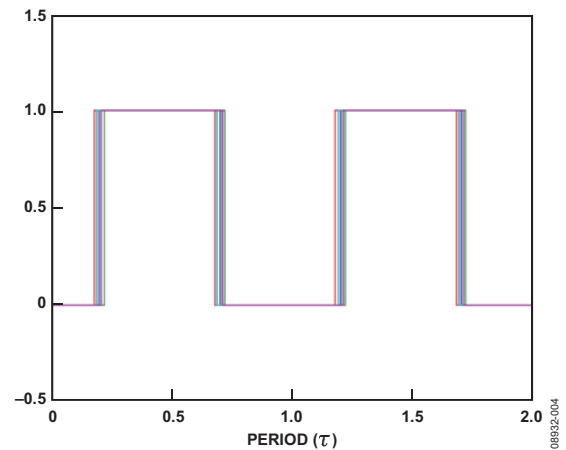


图 4. 带抖动的采样时钟

同样地， $\Delta(t)$ 一般特征化为高斯噪声。

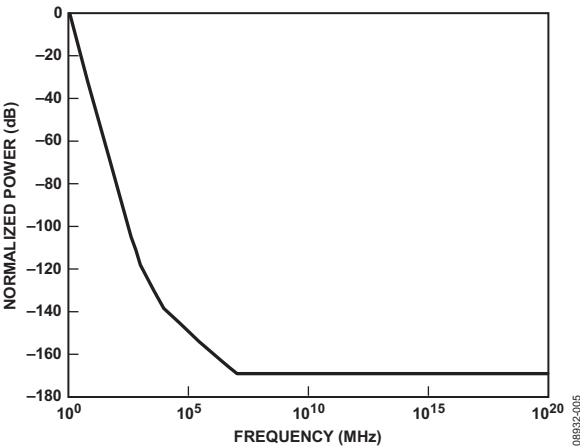


图 5. 振荡器单边带噪声频谱

噪声分析直接超过 5 kHz 直到有源器件在高频下受到限制。低于 5 kHz 的噪声超过散粒噪声和热噪声。该噪声和频率成反比并被识别为 1/f 噪声。图 5 所示为振荡器的典型噪声谱（见参考文献部分 Manassewitsch 著文章）。

功率谱密度

时域信号通过傅里叶变换和频域直接相关（见参考文献部分 Oppenheim 著《离散时间信号处理》）。傅里叶变换可视作信号的幅度和相位谱。信号功率还可在频域中考察。功率谱或功率谱密度由下式得出

$$S_{yy}(\omega) = Y(\omega) \times Y^*(\omega) \quad (5)$$

其中 $Y(\omega)$ 为 $y(t)$ 的傅里叶变换。

如定义一节所述， $\Phi(t)$ 可以是任意干扰信号。为了简化此分析， $\Phi(t)$ 设置为单一频率。假设：

$$\Phi(t) = \theta_d \sin \omega_m t \quad (6)$$

这样公式 2 变为

$$y(t) = \sin(\omega_c t + \theta_d \sin \omega_m t) \quad (7)$$

结果获得一个相位调制信号 $y(t)$ ，在频率 f_m 下最大相位偏差 θ_d （弧度），其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ，无偏移， $A = 0$ 。

Jacobi-Anger 扩展（见参考文献部分 Weisstein 著《简明数学百科》）表明

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \quad (8)$$

或者

$$e^{iz \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \quad (9)$$

可借助欧拉公式转化为

$$\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\theta) \quad (10)$$

和

$$\sin(z \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \cos[(2n-1)\theta] \quad (11)$$

其中 $J_n(z)$ 系数为第一类贝塞尔函数。

使用三角恒等式，可将公式 7、10 和 11 转化为

$$\begin{aligned} y(t) = & J_0(\theta_d) \sin(\omega_c t) \\ & + J_1(\theta_d) [\sin(\omega_c + \omega_m)t - \sin(\omega_c - \omega_m)t] \\ & + J_2(\theta_d) [\sin(\omega_c + 2\omega_m)t - \sin(\omega_c - 2\omega_m)t] \\ & + J_3(\theta_d) [\sin(\omega_c + 3\omega_m)t - \sin(\omega_c - 3\omega_m)t] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

从公式 12 中可以看到， $y(t)$ 在载波频率 f_c 下具有一阶贝塞尔分量，在偏离载波频率的调制频率 f_m 的倍数下具有贝塞尔加权信号。

在 $f_c = 32,768$ Hz 且 $f_m = 1024$ Hz 时，相位偏差为 500 mrad（其中 mrad 表示微弧度）时函数 $y(t)$ 的功率谱密度 $S_{yy}(\omega)$ 如图 6 所示。

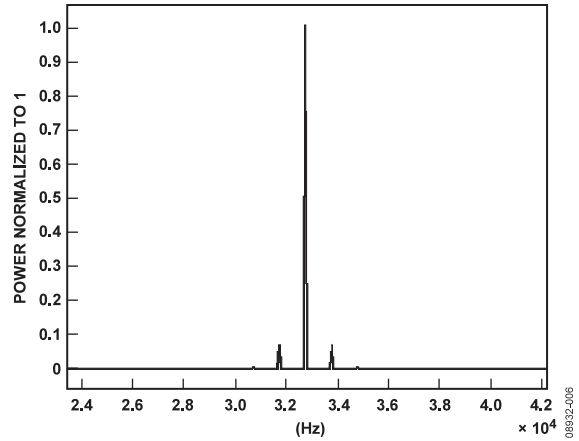


图 6. 功率谱密度 $S_{yy}(\omega)$

图 6 为下式的曲线图

$$S_{yy}(\omega) = Y(\omega) \times Y^*(\omega)$$

其中 $Y(\omega)$ 为 $y(t)$ 的傅里叶变换。

$S_{yy}(\omega)$ 显示频率 f 下的功率幅度。通过单一频率 f_m 调制的信号 $y(t)$ 的功率谱密度仅在 f_c 和 f_m 下具有分量，幅度为贝塞尔平方。

较高阶贝塞尔系数衰减极快。对数功率坐标提供出色的动态范围，表明较高阶分量同样可视为大载波分量。 $S_{yy}(\omega)$ 对数计算公式如下：

$$L_{py}(\omega) = 10 \log_{10}(S_{yy}(\omega)) \quad (13)$$

如图 7 所示。

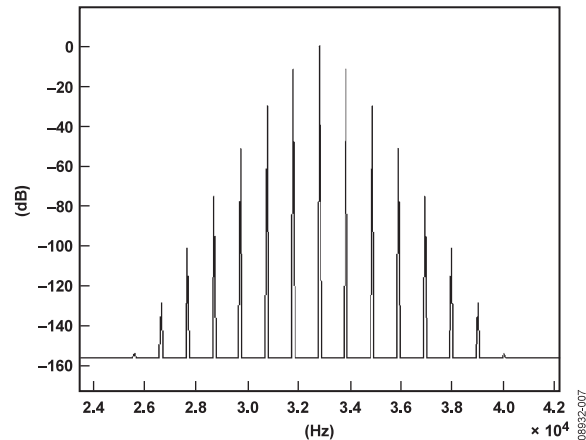


图 7. 功率谱密度 $S_{yy}(\omega)$ 的对数

附加项现在清晰可见。随着相位偏差增加，载波频率幅度减少且调制项幅度增加。500 mrad 相位偏差将载波功率降低 ~12%。

在小幅相位偏差时， $\theta_d \ll 1$ rad， $J_0(\theta_d) \approx 1$ ， $J_1(\theta_d) \approx \theta_d/2$ ，并且 $J_2(\theta_d) \cdots J_n(\theta_d) \approx 0$ （见参考文献部分 Manassewitsch 文章）。

随着相位偏差逼近零，载波功率也逼近 100%。此外，小幅相位偏差有更小比例的载波频率功率分布在调制项中。这进而导致调制项和更精确地与 $\Phi(t)$ 功率近似。

贝赛尔函数具有以下属性：

$$1 = J_0(\beta)^2 + 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta)^2 \quad (14)$$

利用小相位偏差属性， $\Phi(t)$ 的均方根 (rms) 功率（针对单音正弦调制）约为

$$P_{rms} \approx 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta)^2 \quad (15)$$

或者

$$P_{rms} \approx 1 - J_0(\beta)^2 \quad (16)$$

该相位偏差还可均方根幅度来表示。

$$A_{rms} \approx \sqrt{P_{rms}} \quad (17)$$

示例 1

对于 100 mrad 的相位偏差 θ_a ，

$$\begin{aligned} P_{rms} &\approx 1 - J_0(0.1)^2 \\ P_{rms} &\approx 1 - 0.9950094 \\ P_{rms} &\approx 1 - 0.0049906 \\ A_{rms} &\approx 0.0706444 \end{aligned}$$

将此结果与正弦信号功率进行比较，

$$\begin{aligned} e(t) &= A \sin(\omega t) \\ P_e &= A^2/2 \end{aligned}$$

当 $A = 0.1$ 时，均方根功率为 $P_e = 0.005$ 且 $A_{rms} = A/\sqrt{2} = 0.0707107$ ，证实对于小相位偏差，调制项和可提供均方根功率的出色近似。

该自变量可扩展到更复杂的调制信号。更复杂的调制函数可作为许多频率项的叠加来处理，每一项都会影响频谱。功率谱密度具有额外项，其和可表示调制信号的均方根功率。对于小幅度 ($\theta_a \ll 1$ rad)，任意函数的均方根功率 $\Phi(t)$ 由下式给出

$$P_{rms} = \int S_{yy}(\omega) d\omega - S_{yy}(\omega = \omega_c) \quad (18)$$

公式 18 表明相位调制信号的均方根功率等于所有分量的和减去基频（或载波频率）下的功率。

对于正弦信号 $y(t)$ ，相位调制产生一个对称的功率谱密度，使得均方根功率还可表示为

$$P_{rms} = 2 \times \int_{\omega > \omega_c}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega \quad (19)$$

这称为单边带测量技术，通常按 Hz 进行（见参考文献部分 Manassewitsch 文章）。

rms 调制可采用多种方式表示。

$$\begin{aligned} A_{rms} &\approx \sqrt{P_{rms}} && \text{弧度 (如公式 19 所示)} \\ A_{rms}^0 &\approx 360 \times \sqrt{P_{rms}}/2\pi && (20) \end{aligned}$$

公式 20 以度表示相位偏差。

为了将相位噪声和时间抖动相关联，使用下列公式：

$$A_{rms}^t \approx \tau \times \sqrt{P_{rms}}/2\pi \quad (21)$$

其中 $\tau = 1/f_c$ 以时间表示相位偏差。

示例 2—相位噪声

假设使用理想时钟对噪声正弦信号进行采样

$$y(t) = \sin(\omega_c t + N(t))$$

其中：

$$\omega_c = 2\pi 26,2144.$$

$N(t)$ 为标准偏差的高斯噪声， $\sigma = 10$ mrad。

以每秒 4 百万采样点对所构造的信号进行持续 15 ms 的采样，获得 65,000 个采样点。功率谱密度对数归一化为 0 dB 并如图 8 所示。

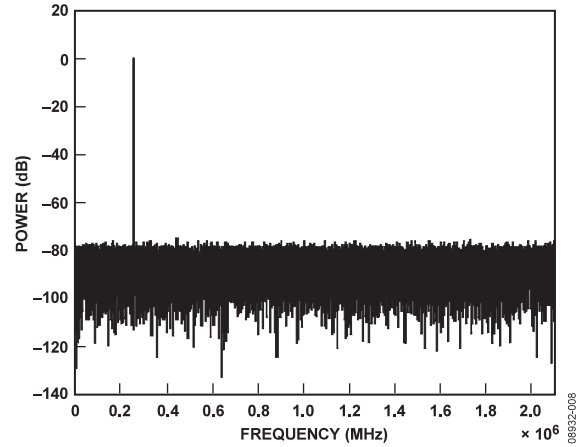


图 8. 260 kHz, 10 mrad 相位噪声

基频在约 260 kHz 附近，在频谱范围内没有噪声。

使用公式 18 的离散形式，

$$P_{rms} = \sum_{n=0}^{N/2} S_{yy}(n), \quad n \neq n_c \quad (22)$$

在 0 至奈奎斯特范围所有频率的功率幅度相加，不包括基频的功率。所得噪声功率为

$$P_{rms} = 1.0017 \times 10^{-4}$$

均方根幅度为 $A_{rms} = 0.010008$ rad。

注意，0.008 mrad 差异为小于 10 mrad 的精确 rms 噪声幅度数个数量级，从而获得一个极出色的渐近。

在时间 t_0 ，相位偏差 $\Phi(t_0) = 0$ 时，输入信号具有振幅 A_0 。在 t_0 时具有相位偏差 $\Phi(t_0) = \Delta_\Phi \text{ mrad}$ 的噪声输入信号具有幅度 A_Φ 。同样地，在时间偏差 $t_1 = t_0 + \Delta_t$ 时采样的输入信号具有幅度 A_τ 。

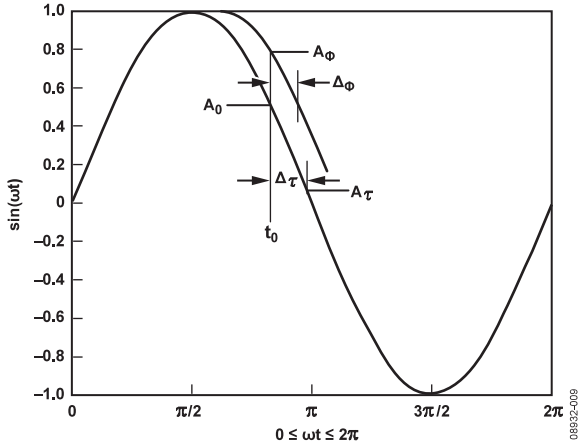


图 9. 时序和相位偏差对正弦信号的影响

图 9 显示存在时间偏差 Δ_t 和相位偏差 Δ_Φ 产生相同的幅度 A_Δ 。不论如何，在相位偏差 Δ_Φ 等于抖动 Δ_t 时，rms 时间偏差产生相同的结果。

示例 3—抖动

在示例 2 中，带相位噪声的信号功率谱信号 $N(t)$ 具有一个高斯分布和标准偏差 $\sigma = 10 \text{ mrad}$ 。现在考虑使用具有高斯噪声 $\eta(t)$ 的抖动时钟进行采样的信号。公式 21 可用来确定 rms 抖动以产生和 10 mrad 相位噪声相同的效果。所得输出位

$$y(t) = \sin(\omega_c(t + \eta(t)))$$

其中载波频率同样为 260 kHz 而 $\eta(t)$ 为具有标准偏差 6.0713 ns 的高斯噪声。

以每秒 4 百万采样点对所构造的信号进行持续 15 ms 的采样，获得 $65,000$ 个采样点。功率谱密度的对数归一化为 0 dB 。

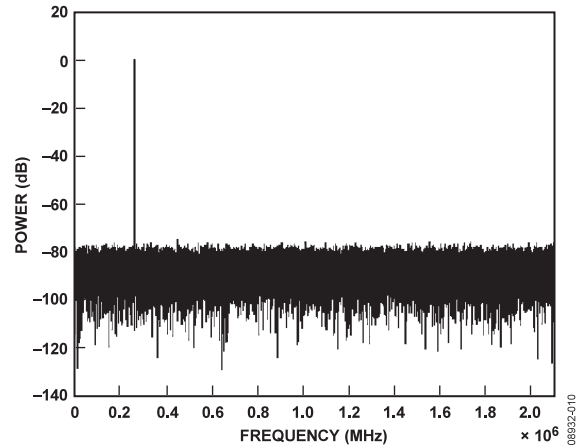


图 10. 以 4 MSPS 采样的一个相位噪声调制 260 kHz 音的 10.65k FFT

使用公式 22，在 0 至奈奎斯特范围所有频率的功率幅度相加，不包括基频的功率。所得噪声功率为

$$P_{rms} = 1.0031 \times 10^{-4}$$

且均方根幅度为

$$A_{rms} = 0.010016 \text{ rad}$$

将结果代入公式 21 以获得

$$A_{rms}^t = 4.86455 \times 10^{-8} \text{ s or } A_{rms}^t \approx 49 \text{ ns}$$

该等结果和示例 2 中所获得结果一致。

宽带噪声调制时钟或输入信号导致带分散噪声的功率谱。此外，噪声调制输入信号或时钟产生在载波附近对称的噪声。功率频谱密度可用来确定和指定频率分量或频率范围相关的相位噪声或抖动。大对称项可突显调制信号及 / 或时钟的特定频率。和特定频率相关的均方根功率可直接从功率谱密度中提取。对于频率范围，可使用下列公式。

$$P_{rms} = \sum_{n=f_1}^{f_2} S_{yy}(n) \quad (23)$$

或对于单边带

$$P_{rms} = 2 \times \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{yy}(\omega) d\omega \quad (24)$$

转换器应用

如今，高速转换器在 12 位以上的分辨率下采样速率超过 100 MSPS，一般可以提供 70 dBc 以上的信杂比 (SNR)、100 dBc 以上的无杂散动态范围(SFDR)。数模转换器(DAC)的性能直接受采样时钟抖动影响。DAC 使用噪声时钟进行采样所产生的音调可产生带相位噪声的信号。ADC 同时受到来自采样时钟和输入信号两方面的噪声干扰。在示例 3—抖动中所推导的结果可应用于转换器。

将该等结果关联到 ADC，考察图 11 中所示的配置。

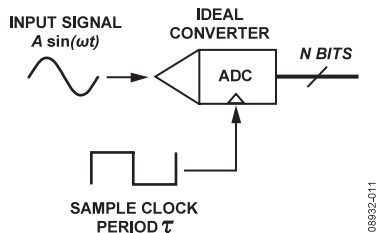


图 11. ADC 功能框图

ADC 以时间常数 t (周期为 τ) 对输入信号 $A \sin(\omega t)$ 进行采样，产生一个 N 位量化输出。

假设输入信号内的噪声和采样时钟内的噪声无关，则由方和根 (RSS) 可得到总噪声。如果噪声足够大，则转换器的最高性能会受到影响。

量化噪声直接和位数成正比。一个采样点在 ADC 范围内的最大误差为最低有效位分辨率 Q_N 除以 2 ($Q_N/2$) (见参考文献部分 van de Plassche、Oppenheim 文章以及 Norsworthy、Schreier 著《 Δ - Σ 数据转换器理论设计和仿真》)。该误差由采样中的信号所决定。对于随机变化的信号，量化误差是不相关的，因此在 $\pm Q_N/2$ 范围内的任意处。如果该误差在统计上无采样中信号无关，则可以发现最大 SNR 可由下列公式导出

$$SNR = 6.02N + 1.8 \quad (25)$$

对于一个 12 位转换器，理论最大 SNR 为 ~ 74 dBc。74 dBc 的总量化噪声功率相当于

$$P_{qn} \approx 10^{-7.4}$$

$$P_{qn} \approx 39.8107 \times 10^{-9}$$

在测试时最好使测试设置比被测转换器好 10 dB。要测试一个 12 位转换器，所需测试设置噪声功率为 84 dBc。

$$P_{qn} \approx 10^{-8.4}$$

$$P_{qn} \approx 3.98107 \times 10^{-9}$$

利用公式 17，此噪声功率可关联到 rms 相位偏差。

$$A_{rms} \approx 0.0631 \text{ mrad}$$

对于一个 10 MHz 输入信号，这对应于下列的抖动

$$A_{rms}^t \approx \tau \times \sqrt{P_{rms}/2}$$

$$A_{rms}^t \approx 100 \times 10^{-9} (\sqrt{3.98107 \times 10^{-9}})/2\pi$$

$$A_{rms}^t \approx 1.004 \times 10^{-12} \text{ sec}$$

表 1 所列为由于量化噪声和相对相位噪声均方根幅度所产生的转换器 SNR 限值。

表 1 转换器 SNR 限值

位号	理论 SNR 限值 (dB)	对应相位噪声 (mrad)	测试设置	
			10 dB (mrad)	6 dB (mrad)
8	49.96	3.177	1.005	1.592
10	62	0.794	0.251	0.398
12	74.04	0.199	0.063	0.1
14	86.08	0.0497	0.016	0.025
16	98.12	0.0124	0.004	0.006

表 1 还提供了在比转换器好 10 dB 和 6dB 时测试设置相应的相位噪声幅度。在某些情况下，可以接受比转换器好 6dB 的测试设置（尤其在 10 dB 难以获得时）。

根据公式 21 可以轻松获得等效抖动幅度。

转换器 SNR 性能一般由功率谱密度决定。采样频率和数据采样点数目直接确定频率分辨率。对于以 32 MHz 采样的转换器而言，4k FFT 可以累积足够的的数据，使最小频率分辨率达到 8 kHz。因此，功率谱密度以 8 kHz 间隔显示信息。每个 8 kHz 区间提供在该间隔内频率和其混叠频率的功率和。在这些情况下无法确定距离载波 1kHz 的分量的大小。利用更大 FFT 可以提高频率分辨率。在 32 MHz 下采样的转换器利用 1M FFT 可将低频相位噪声（例如 $1/f$ 噪声）分辨率提高到 32 Hz。

示例 1

对于采样率为 32 MSPS、时钟抖动为 20 ps 的 12 位 ADC，输入信号处于 4 MHz，1 mrad 相位噪声分量为 2 kHz，高斯相位噪声为 0.5 mrad。使用此配置获得 4 k 采样点会产生如图 12 所示的功率谱密度。

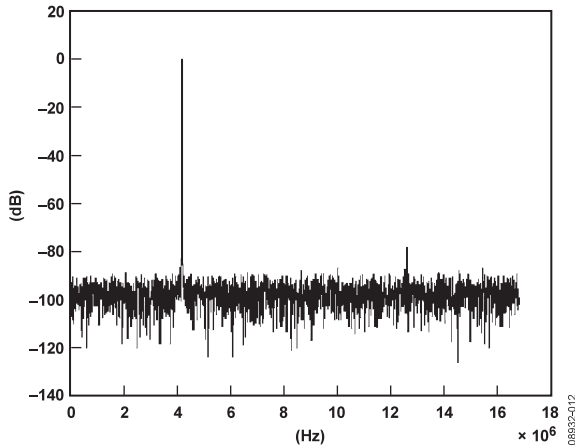


图 12. 采样率为 32 MSPS 的调制 4 MHz 音的 4k FFT

使用等式 22，计算 6.628^{-7} W 的噪声功率。但是，理论值应当为 5.677^{-7} W，即抖动、相位噪声和量化噪声的 RSS。

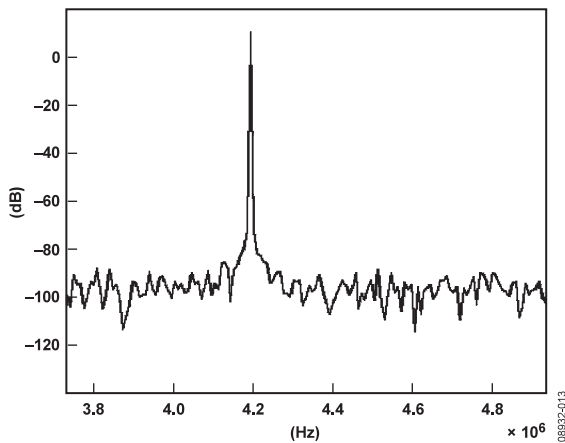


图 13. 4 MHz 基频特写图：由于低区间分辨率所引起的波裙

特写（见图 13）显示基频附近的波裙。频率分辨率为 8 kHz，而 2 kHz 调制项混入了基频和周围区间。

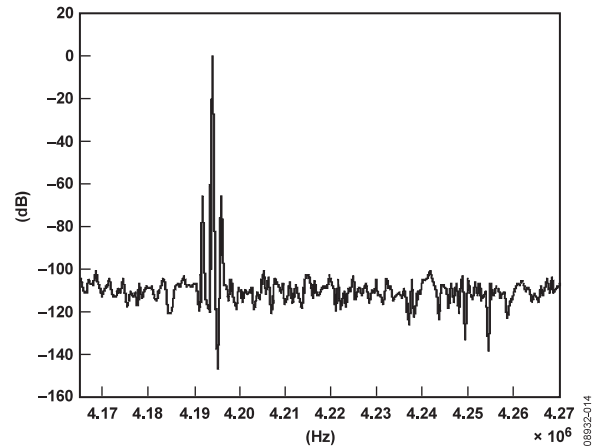


图 14. 更高分辨率 FFT：显示调制项

使用 65 k FFT，频率分辨率可达到 500 Hz。我们可以发现两个新对称项，揭示了一个相位调制。将这些项添加到集成噪声功率内后计算获得 5.696^{-7} W 的噪声功率。

测试设备

相位噪声和抖动可视为使用示波器时的时间偏差或使用频谱分析仪时的频谱。

示波器

示波器分为两类:实时和采样(见参考文献部分 Tektronix《解析示波器的 XYZ》)。

实时示波器在一个触发事件出现时捕捉一系列采样点。周期偏差通过一个固定阈值从数据中提取获得。这种方法受到示波器及其内部抖动的测量精度影响。Tektronix TDS7404 规定了 ± 8.5 ps 的精度和 1.5 ps rms 的一般抖动本底噪声。其精度为 ± 15 ps。要提升精度,可在处理过程中使用统计方法,包括示波器的垂直分辨率和较大记录长度。使用后者技术, Tektronix 宣称获得 1.5 ps 的抖动测量精度(见参考文献见 Tektronix《使用 Excel 分析时钟抖动》及《精密抖动分析的解析和执行》)。

采样示波器在每次触发时就会累积输入信号数据。为了获得时间偏差,它反复对输入信号进行采样,在水平界面处获得一个点分布。根据测量中的时间偏差大小调整水平和垂直坐标。上述偏差测量方法主要受触发抖动影响。采样示波器时间间隔精度远更出色,更重要的是采样间隔精度低至 10 fs。Tektronix 11801C 的时间间隔精度为 $1 \text{ ps} + 0.0004\% \times (\text{位置})$,而触发抖动一般为 1.1 ps rms。TDS8000B Tektronix 采样示波器规定了 800 fs 的触发抖动(见参考文献部分 Tektroni《8000 系列采样示波器的自动测量算法及方法》)。

频谱分析仪

频谱分析仪根据频率成分显示信号,在分辨率带宽(RBW)设置内显示一系列测量,最终在线性或对数窗口内显示电压及/或功率。查看信号功率类似于通过傅里叶分析获得功率谱曲线。

电子器件内的随机噪声具有高斯分布。因此,在频谱分析仪 RBW 内的采样点具有一个概率分布,但以简单的幅度显示。频谱分析仪实际上测量的是同相(I)和正交(Q)分量(见参考文献部分 Hewlett Packard 著《频谱分析仪测量和噪声》)。I/Q 分量提供信号的幅度和相位。带通噪声具有一个与 I 和 Q 分量同时无关的高斯分布。

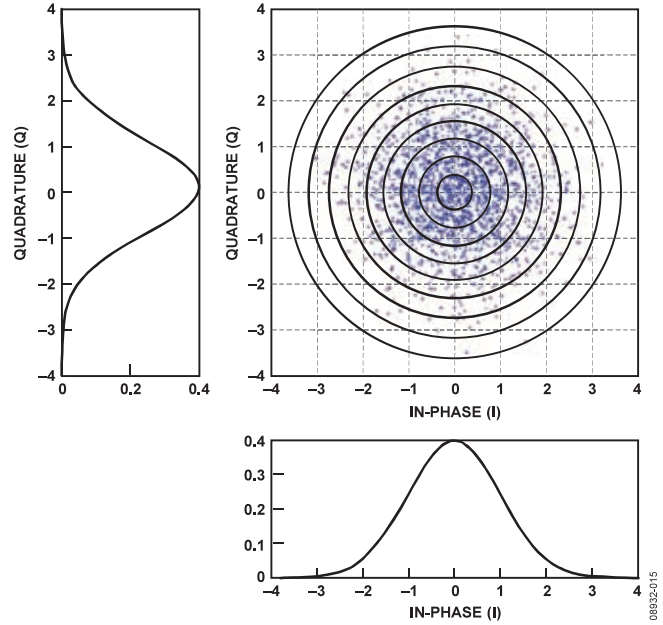


图 15. 频谱分析仪包络检测器输入分布

幅度由包络检测器获得并导出为

$$v = \sqrt{v_I^2 + v_Q^2} \quad (26)$$

噪声幅度在图 15 中心周围形成同心环。每个环内的数目显示了噪声幅度的分布情况。噪声包络的分布函数实际上为瑞利分布(见参考文献部分 Papoulis 著《概率、随机变量和随机过程》)。

$$D_{env}(v) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

在了解概率密度函数后,可利用下列公式获得平均电压包络

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v D_{env}(v) dv = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (28)$$

平均功率导出为

$$\bar{p} = \int_0^{\infty} \frac{v^2}{R} D_{env}(v) dv = \frac{2\sigma^2}{R} \quad (29)$$

利用平均包络电压平方,然后除以 R 来计算功率,无法获得公式 29 中的相同结果。所得结果小 1.05 dB。

$$\begin{aligned} 10 \log\left(\frac{v^2/R}{\bar{p}}\right) &= 10 \log\left(\frac{\sigma^2 \pi R}{4\sigma^2 R}\right) \\ &= 10 \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1.05 \text{ dB} \end{aligned}$$

在对数显示模式下使用频谱分析仪时要注意其他问题。在对数显示模式下，输入信号穿过一个对数放大器。这进而会导致一个对数化概率密度函数。此外，频谱分析仪显示该对数的平均值。对数处理导致一个低 2.51 dB 的噪声响应。

检验

噪声少计算 2.51 dB 的情况证明如下。

$$P_{\log} = 10 \log(v^2) \text{ or } 20 \log(v) \quad (30)$$

利用两侧的导数，

$$dp_{\log} = \frac{20}{\ln 10} \times \frac{1}{v} dv \quad (31)$$

$$v = 10^{\frac{P_{\log}}{20}} \quad (32)$$

和

$$dv = 10^{\frac{P_{\log}}{20}} \left(\frac{\ln 10}{20} \right) dp_{\log} \quad (33)$$

利用莱布尼兹定则（见参考文献部分 Weisstein 文章）

$$f_y(y) = f_x(x) \frac{dx}{dy} \quad (34)$$

或帕普里斯（见参考文献部分）

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{dy/dx} \text{ at } x = T^{-1}\{y\} \quad (35)$$

获得

$$\begin{aligned} D_{\log}(p) &= \frac{D_{env}(v)}{dp_{\log}/dv} \text{ at } v = 10^{\frac{y}{20}} \\ &= \frac{10^{\frac{y}{20}} \times D_{env}(10^{\frac{y}{20}})}{20/\ln 10} \text{ at } v = 10^{\frac{y}{20}} \end{aligned} \quad (36)$$

该结果即输入包络对数功率的概率分布。

平均功率率则导出为

$$\overline{P_{\log}} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\log} D_{\log}(P_{\log}) dp_{\log} \quad (37)$$

根据莱布尼兹定则（和帕普里斯）

$$f_y(y)dy = f_x(x)dx$$

因此，

$$\begin{aligned} \overline{P_{\log}} &= \int_0^{\infty} P_{\log} D_{env}(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} 20 \log(v) D_{env}(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} 20 \log(v) \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned} \quad (38)$$

设

$$\begin{aligned} 20 \log(v) &= 10 \log\left(\frac{2\sigma^2 v^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= 10 \log(2\sigma^2) + 10 \log\left(\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

获得

$$\begin{aligned} \overline{P_{\log}} &= 10 \log(2\sigma^2) \int_0^{\infty} \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &+ \int_0^{\infty} 10 \log\left(\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned} \quad (40)$$

第一积分到达 1，因为这不过是瑞利概率密度积分。设

$$u = \frac{v^2}{\sigma^2} \quad (41)$$

在第二积分内，得到

$$\overline{P_{\log}} = 10 \log(2\sigma^2) + \frac{10}{\ln 10} \int_0^{\infty} \ln(u) e^{-u} du \quad (42)$$

第一项为平均功率的对数，第二项为欧拉常数的负数（见参考文献部分 Weisstein 文章）。欧拉常数计算精度达到 7,000,000 位并表示为 Υ 。 Υ 约等于 0.5772，使最后项等于 -2.5067。

最先进的频谱分析仪具有应用必要校正系数的噪声测量。

除了视需要应用的已知校正系数外，还必须正确配置频谱分析仪以提供精确结果。更小的输入信号可以降低基准来精确测量。但是，降低基准会提高输入 IF 级的增益。必须小心处理使初始 IF 级不会过载。IF 输入部分的过载可能会引起失真积（见参考文献部分 Rauscher 著《频谱分析仪基础》）。此外，更精细的频率和幅度分辨率测量可通过分别提高分辨率带宽（RBW）和视频带宽（VBW）来获得。但是提高分辨率的代价是扫描时间过长。令人放心的是，软件可以进行所需测量并应用适当的校正系数。

实验结果

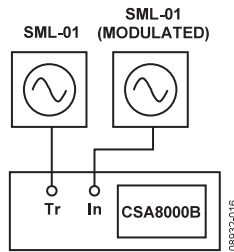


图 16. 示波器设置

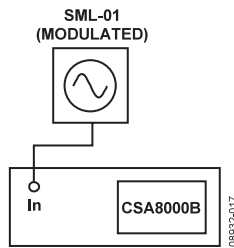


图 17. 频谱分析仪设置

在 Rohde & Schwarz SML-01 产生并调制信号后使用 Tektronix CSA8000B 和 Rohde & Schwarz FSIQ7 进行测量。将第二个非调制 SML-01 频率设为与第一个 SML-01 相同并用来触发 CSA8000B，对由于大单音调制、大高斯噪声调制和小噪声调制所引起的相位噪声进行分析。在所有情况下，所用时钟源为 Rohde & Schwarz SML-01。

替代性示波器设置使用一个宽带电阻式分配器来同时提供触发和采样输入。这种方法抑制低频噪声，从而可产生人为的低噪声测量结果。

信号 1

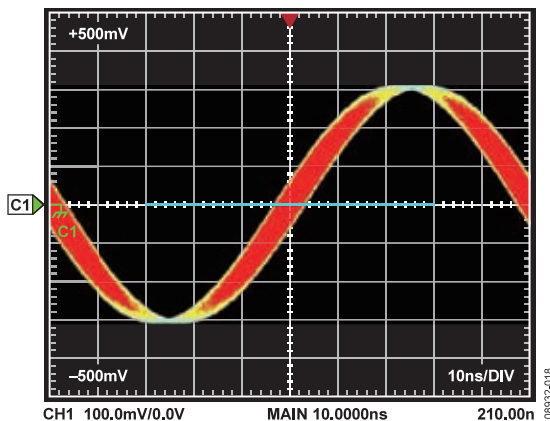


图 18. 10 MHz 的 SML-01，101 kHz 下的调制 200 mrad。

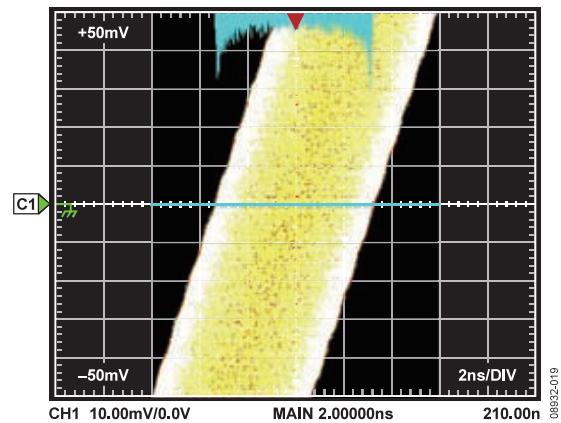


图 19. 上升沿特写

在上升沿截面处获得的水平柱状图显示一个 2.218 ns 的标准偏差和一个 6.6 ns 的峰峰值偏差。

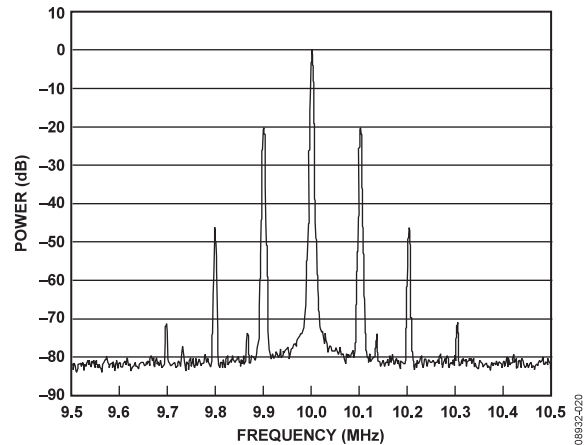


图 20. 单频相位调制频率

频谱分析仪清楚显示由于单频相位调制所引起的频谱。载波右边第一项的贝塞尔系数为 $J_1(\theta_d)$ 。因为 $J_1(\theta_d) \approx \theta_d/2$ ，调制可近似为 200 mrad。

信号 2

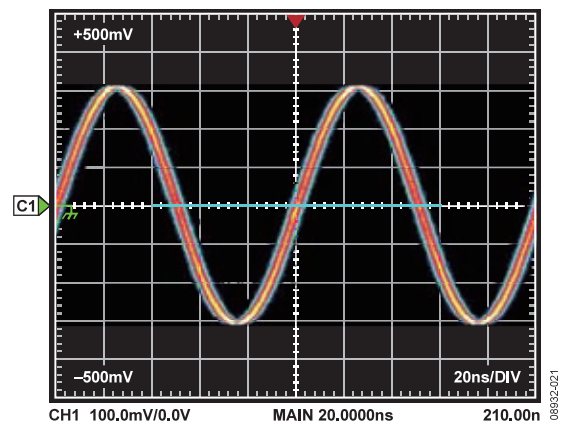


图 21. 10 MHz 下 SML-01 高斯噪声调制为 67 mrad RMS

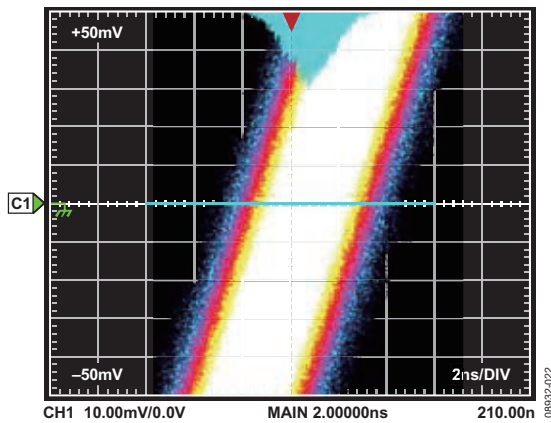


图 22. 上升沿特写

在上升沿截面处获得的水平柱状图显示一个 1.005 ns 的标准偏差和一个 7.92 ns 的峰峰值偏差。示波器触发输入精度在低压摆率时降低。

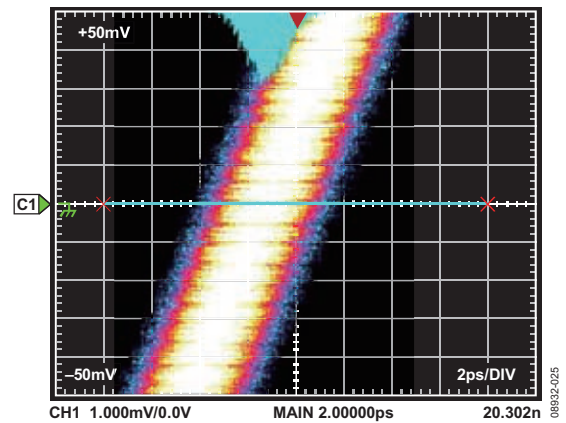


图 25. 上升沿特写

在此情况下，偏差小得低于示波器的触发抖动。结果显示标准偏差为 837.3 fs，峰峰值偏差为 5.56 ps。

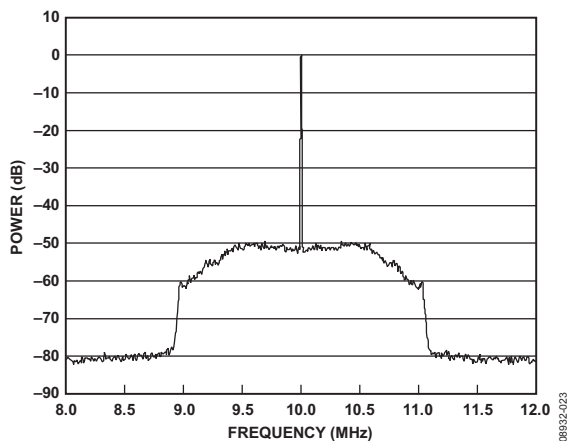


图 23. 载波噪声输出 1 MHz 的 10 MHz 信号

图 23 显示载波宽带噪声输出 1 MHz 所引起的频谱。使用单边带相位噪声测量（见公式 19），所计算的相位噪声均方根幅度为 0.0676 弧度，对应于约 1.075 ns 的时间抖动。

信号 3

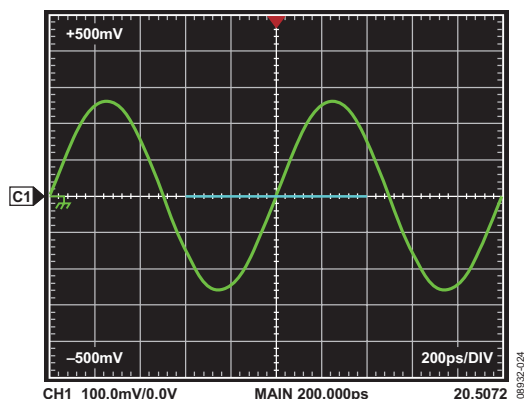


图 24. 设置以产生清洁 1GHz 的 SML-01

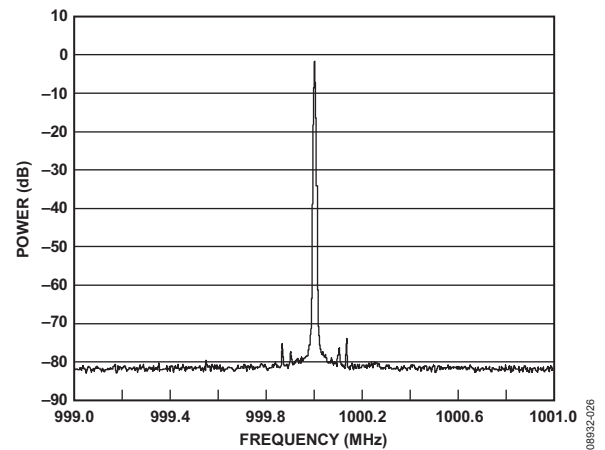


图 26. 相位噪声为 1.6 mrad RMS 的满量程 1 GHz 信号

频谱分析仪中心频率为 1 GHz 且量程设为 2 MHz。动态范围可通过改变频率范围来提高，这样较大载波会超出量程。

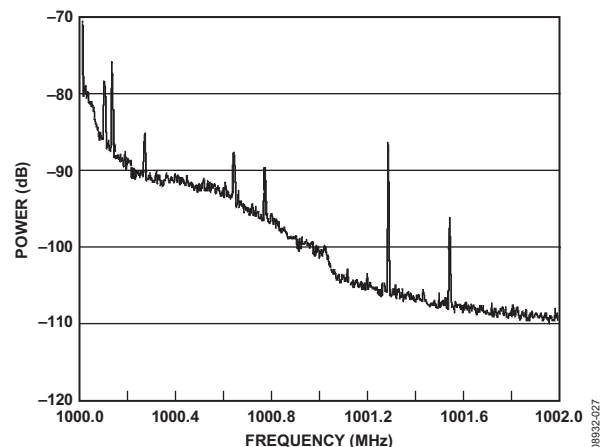


图 27. 相位噪声为 1.6 mrad RMS 的单边带 1 GHz 信号

现在范围从距载波 5 kHz 处开始，图 27 显示距载波 1 MHz 处存在宽带相位噪声。基准由于图 27 中出现失真而过低。要获得精确的结果，测量必须以更小的间隔进行。在载波 10 kHz 内进行测量时所选基准不得使输入 IF 级过载。

单边带测量（见公式 19）所测相位噪声为 1.6 mrad。这对应于 255 fs，远低于示波器的触发动抖分辨率。

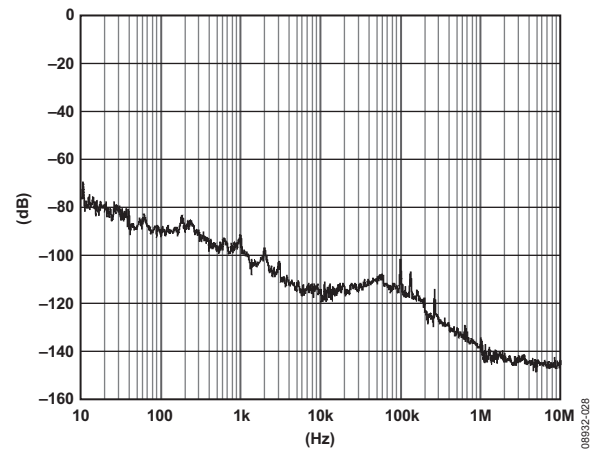


图 28. 相位噪声为 1.6 mrad RMS 并具有非过载输入级的单边带 1 GHz 信号

高速转换器

AD9235 应用会引入相位噪声和抖动。我们利用频谱分析仪验证所获得的结果并联系所建立的理论。AD9235 是一种采样时钟 65 M，SNR 约 70 dBc 的高速模数转换器。该实验在 CTS5340 测试机上进行。Rohde & Schwarz SMGU 同时产生输入音和时钟。输入频率设为 .4 MHz，时钟输入设为 259.995 MHz，分频以产生采样率 $f_s \approx 65$ MSPS。抽取采样率以产生有效采样率 $f_{es} \approx f_s/15$ 。

该应用通常会在 70 dBc 附近产生 SNR。图 29 显示使用 4k FFT，基频混入区间 1827 内的典型功率谱密度。

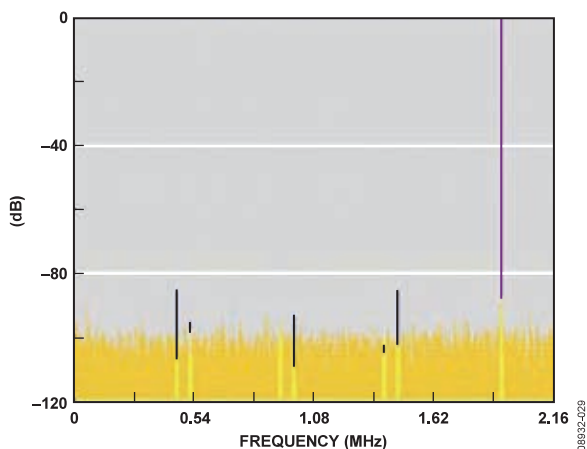


图 29. AD9235 ADC 应用的 FFT，采样率抽拉至 ~ 65 MSPS/15 且输入频率设为 2.4 MHz。

信号 $\Phi(t) = 0.01 \sin 2\pi 10,000t$ 调制到基频上。所得功率谱密度如图 30 所示。

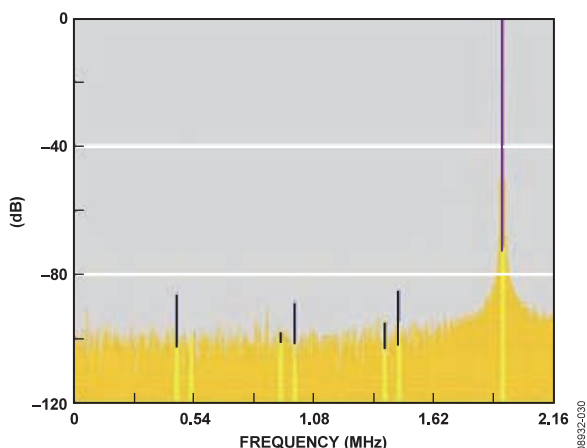


图 30. 使用 10 kHz 音调制基频的 AD9235 ADC 应用的 FFT

图 30 所示为基频附近的对称峰值，指示调制。FFT 的区间宽度为 ~ 1057 Hz。计算区间，从基频起在第 9 和 10 区间可以发现主要峰值，意味着调制在 9.5 kHz 和 10.5 kHz 之间。调制项由于采样率非 10 kHz 的直接倍数和非窗口化的 FFT 而散布。对于小信号调制（因为调制峰值超过 50 dBc，这是更安全的假设条件），第一个调制贝塞尔项 $J_1(\theta_d)$ 约 $\theta_d/2$ 。将调制项附近 8 个最高峰值的功率，获得

$$P_{I_1} \approx 2.0324 \times 10^{-5}$$

$$\theta_d/2 = \sqrt{P_{I_1}} \approx 0.0045$$

$$\theta_d = 0.009$$

即使调制项在整个频谱上散布，大多数调制能量中心频率为 $f_c \pm f_m$ 。将八项相加产生在实际值 10% 误差内的近似值。

附加相位噪声的基频功率谱密度如图 31 所示。

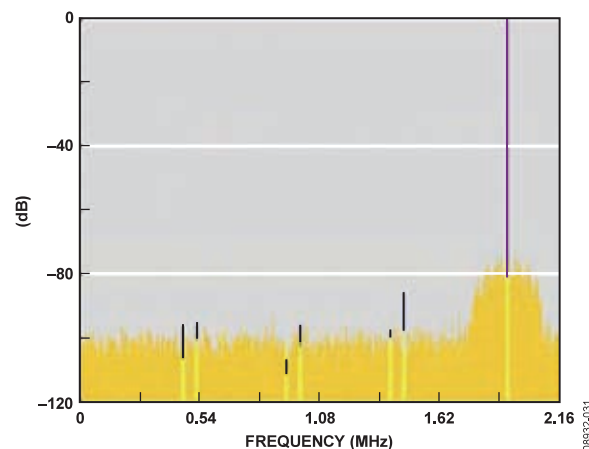


图 31. 相位噪声调制基频的 AD9235 ADC 应用的 FFT

CTS5340 测试机将滤波信号发送到应用电路板。2.4 MHz 滤波器的等效噪声带宽约为 300 kHz。限带噪声清楚地出现在基频周围，表明相位调制噪声在 2.4 MHz 输入音上。相位噪声产生 58 dBc 的 SNR。

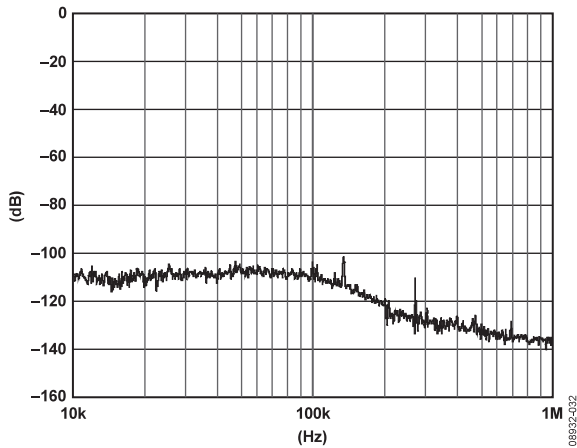


图 32. 相位噪声为 1.5 mrad 的基频单边噪声频谱

输入信号的单边带测量显示相位噪声为 1.5 mrad。

$$P_{rms} = A^2$$

$$P_{rms} = 2.25 \times 10^{-6} = -56.478 \text{ dB}$$

这和应用测试结果的时钟源相位噪声一致。

添加到采样时钟的抖动结果如图 33 所示。

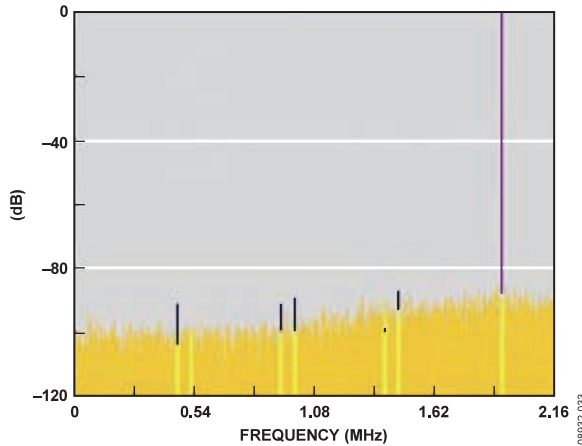


图 33. 使用抖动时钟所采样的 AD9235 ADC 应用的 FFT

在此情况下，功率谱密度本底噪声略微升高，产生 64 dBc 的 SNR。时钟源为设为 259.995 MHz 的 Rohde & Schwarz SML-01。SML-01 时钟源的单边带测量如图 34 所示。

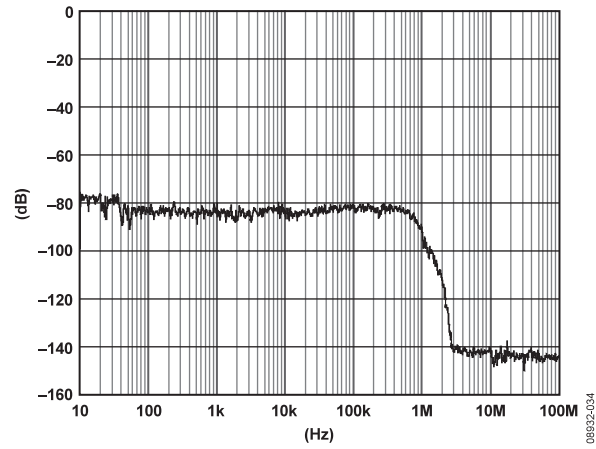


图 34. 相位噪声

时钟源相位噪声为 66.9 mrad。

$$A_{rms}^t = 0.0669 / (2\pi 259.995 \times 10^6) \\ \approx 40.953 \text{ ps}$$

在采样时钟上的相位噪声对应于约 41 ps 的时钟时间抖动。该抖动可关联至 2.4 MHz 输入信号上数弧度的相位噪声。

$$A_{rms}^t = (40.953 \times 10^{-12}) \times (2\pi 2.4 \times 10^6) \\ \approx 0.618 \text{ mrad}$$

41 ps 的时钟抖动对应于 2.4 MHz 基频上的 0.618 mrad 相位噪声。

$$P_{rms} = A_{rms}^2$$

$$P_{rms} = 3.814 \times 10^{-7} = -64.187 \text{ dB}$$

采样时钟上的噪声和应用测试结果一致。

结论

在此应用笔记中提出的理论阐述了相位噪声及抖动与其频域表示方式的直接关系。在频域内进行相位噪声和抖动分析揭示了噪声信号的成分。此外，频域测量还可在更高频率下提高分辨率。

参考文献

- Hewlett Packard. 1998. Application Note 1303. *Spectrum Analyzer Measurements and Noise*.
- Manassewitsch, Vadim. 1987. *Frequency Synthesizers Theory and Design Third Edition*. Wiley-Interscience.
- Norsworthy, Steven, Richard Schreier and Gabor Temes. 1997. *Delta-Sigma Data Converters Theory Design and Simulation*. IEEE Press.
- Oppenheim, Alan and Ronald W. Schaffer. 1989. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.
- Papoulis, Athanasios. 1984. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill.
- Rauscher, Christoph. 2001. *Fundamentals of Spectrum Analysis*. Germany: Rohde & Schwarz.
- Tektronix. 2009. *XYZs of Oscilloscopes*. Application Note.
- Tektronix. 2001. *Analyzing Clock Jitter Using Excel*. Application Note.
- Tektronix. 2004. *Understanding and Performing Precise Jitter Analysis*. Application Note.
- Tektronix. 2000. *Automatic Measurement Algorithms and Methods for the 8000 Series Sampling Oscilloscopes*. Application Note.
- van de Plassche, Rudy. 1994. *Integrated Analog-To-Digital and Digital-To-Analog Converters*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Weisstein, Eric. 1999. *Concise Encyclopedia of Mathematics*. Florida: CRC Press.

注释

注释

注释